$\vec{v}\begin{pmatrix}a'\\b'\\c'\end{pmatrix}$, on aura : $\vec{u}\wedge\vec{v}=\begin{pmatrix}bc'-cb'\\a'c-c'a\\ab'-a'b\end{pmatrix}$ d'où

$$\vec{u}\wedge(\vec{u}\wedge\vec{v})=\begin{pmatrix}abb'-a'b^2-a'c^2+acc'\\bcc'-b'c^2-b'a^2+aa'b\\aa'c-c'a^2-c'b^2+cbb'\end{pmatrix}.$$

$$\Rightarrow \vec{u}\wedge(\vec{u}\wedge\vec{v})=\begin{pmatrix}a(bb'+cc')-a'(b^2+c^2)\\b(cc'+aa')-b'(c^2+a^2)\\c(aa'+bb')-c'(a^2+b^2)\end{pmatrix}$$

On sait que: $\vec{u}\vec{v}=aa'+bb'+cc'=0$

Donc on aura: $bb'+cc'=-aa';cc'+aa'=-bb'$ et $aa'+bb'=-cc'$

En remplaçant dans les expressions des composantes de $\vec{u}\wedge(\vec{u}\wedge\vec{v})$; on aura: $\vec{u}\wedge(\vec{u}\wedge\vec{v})=\begin{pmatrix}-aaa'-a'(b^2+c^2)\\-bbb'-b'(c^2+a^2)\\-ccc'-c'(a^2+b^2)\end{pmatrix}$

Finalement $\vec{u}\wedge(\vec{u}\wedge\vec{v})=\begin{pmatrix}-a'(a^2+b^2+c^2)\\-b'(a^2+b^2+c^2)\\-c'(a^2+b^2+c^2)\end{pmatrix}$

D'autre part on a: $\|\vec{u}\|^2=a^2+b^2+c^2$ d'où $\|\vec{u}\|^2\vec{v}$

$\begin{pmatrix}a'(a^2+b^2+c^2)\\b'(a^2+b^2+c^2)\\c'(a^2+b^2+c^2)\end{pmatrix}$.

Conclusion: Si $\vec{u}\perp\vec{v}$ on aura: $\vec{u}\wedge(\vec{u}\wedge\vec{v})=-\|\vec{u}\|^2\vec{v}$

Exercice n° 14

- On a:

$$\|\vec{u}\|=\sqrt{\left(\frac{8}{9}\right)^2+\left(\frac{1}{9}\right)^2+\left(\frac{-4}{9}\right)^2}=\sqrt{\frac{64}{81}+\frac{1}{81}+\frac{16}{81}}=\sqrt{\frac{81}{81}}=1$$

.

De même $\|\vec{v}\|=1$ et $\|\vec{w}\|=1$.

Aussi on a: $\vec{u}\vec{v}=\frac{8}{9}\times\frac{1}{9}+\frac{1}{9}\times\frac{8}{9}+\left(-\frac{4}{9}\right)\times\frac{4}{9}=\frac{16}{81}-\frac{16}{81}=0$.

$\vec{u}\vec{w}=\frac{8}{9}\times\frac{4}{9}+\frac{1}{9}\times\left(-\frac{4}{9}\right)+\left(-\frac{4}{9}\right)\times\frac{7}{9}=\frac{32-4-28}{81}=0$.

$\vec{v}\vec{w}=\frac{1}{9}\times\frac{4}{9}+\frac{8}{9}\times\left(-\frac{4}{9}\right)+\left(-\frac{4}{9}\right)\times\frac{7}{9}=\frac{4-32-28}{81}=0$.

D'où $\|\vec{u}\|=\|\vec{v}\|=\|\vec{w}\|=1$ et $\vec{u}\vec{v}=\vec{u}\vec{w}=\vec{v}\vec{w}=0$.

Par suite la base $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ est orthonormée

On a:

$\vec{u}\wedge\vec{v}\begin{pmatrix}\frac{4}{9}\\-\frac{4}{9}\\\frac{7}{9}\end{pmatrix}=\vec{w}$ donc la base $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ est directe

Exercice n° 15

● $\overrightarrow{AM}\,\overrightarrow{AB}=0\Leftrightarrow(AM)\perp(AB)$.

Donc l'ensemble des points M est la droite qui est perpendiculaire à (AB) au point A .

● $\overrightarrow{AM}\wedge\overrightarrow{AB}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}$ *et* $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires

Donc $(AM)//(AB)$ d'où M décrit la droite (AB) .

● **Rectifier** $(\vec{u}\wedge\vec{v}).\overrightarrow{AM}=0$

$(\vec{u}\wedge\vec{v}).\overrightarrow{AM}=0\Leftrightarrow$M∈Plan (A, $\vec{u};\vec{v}$)

● **Rectifier** $(\vec{u}\wedge\vec{v})\wedge\overrightarrow{AM}=\vec{0}$

$(\vec{u}\wedge\vec{v})\wedge\overrightarrow{AM}=\vec{0}\Leftrightarrow$M∈la droite passant par A et ⊥au plan P(A, $\vec{u};\vec{v}$).

Exercice n° 16

- L'aire A_1 du triangle CEH:

CEH triangle rectangle en H$\Rightarrow A_1=\frac{1}{2}HC\times HE=\boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}}$.

- L'aire A_2 du triangle CFH:

On a CF = CH = FH = $\sqrt{2}$ donc CFH est un triangle équilatéral

Donc $A_2=\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{FH}\wedge\overrightarrow{FC}\right\|=\frac{1}{2}$

$\left\|\overrightarrow{FH}\right\|\left\|\overrightarrow{FC}\right\|.\left|\sin\frac{\pi}{3}\right|=\frac{1}{2}.\sqrt{2}.\sqrt{2}.\frac{\sqrt{3}}{2}=\boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}}$.

- L'aire A_3 du triangle CDF:

CEH triangle rectangle en C $\Rightarrow A_3=\frac{1}{2}CF\times CD=\boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}}$.

Exercice n° 17

$M_O(\vec{F})=\overrightarrow{OA}\wedge\vec{F}$

● a) $\overrightarrow{OA}\wedge\vec{F}=(\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{HA})\wedge\vec{F}$

$=\overrightarrow{OH}\wedge\vec{F}+\underbrace{\overrightarrow{HA}\wedge\vec{F}}_{\overrightarrow{HA}\text{ et }\vec{F}\text{ colinéaires}}=\overrightarrow{OH}\wedge\vec{F}+\vec{0}=\overrightarrow{OH}\wedge\vec{F}$

Donc :

$$\left\|\overrightarrow{OA}\wedge\vec{F}\right\|=\left\|\overrightarrow{OH}\wedge\vec{F}\right\|=\left\|\overrightarrow{OH}\right\|\times\left\|\vec{F}\right\|\times\underbrace{\left|\sin(\pm\frac{\pi}{2})\right|}_{1}=OH\times\left\|\vec{F}\right\|$$

Qarray.tn - Agra Tech Qarray.tn